Методы Рунге-Кутта

Метод предиктор-корректор

(1) Преобразуем з-чу Коши не через разностную аппроксимацию пр-ной, а через ∫ интеграл на каждой ячейке сетки ω_h:

$$\int dv \Big|_{v_i}^{v_{i+1}} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\,dx \Rightarrow v_{i+1} = v_i + \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f\,dx}_{\text{по методу трапеций}}$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{f_{i+1}+f_i}{2}h + O(h^3)$$ — неявная ф-ла, т.к. $f_{i+1} = f(x_{i+1}, v_{i+1})$

В этом случае решение v_{i+1} ищут в два этапа:

1 — v_{i+1} находят по ф-ле Эйлера — это v^*_{i+1}, вычисляют $f_{i+1}(x_{i+1}, v^*_{i+1})$, т.е. "предсказывают" решение.

2 — корректируют предсказанное решение по ф-ле

⇒ метод "предиктор-корректор": (отбрасываем $O(h^3)$):

$$\boxed{\begin{aligned} y^*_{i+1} &= y_i + h f(x_i, y_i); \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*_{i+1})\right], \end{aligned}} \quad y_0 = v_0.$$

Локальная погрешность метода — $O(h^3)$, а интегральная — $O(h^2)$, т.е. — это метод Р-К второго порядка.

Усовершенствованный метод Эйлера

(2) Возьмём интеграл не по методу трапеций, а по прямоугольникам

$$v_{i+1} = v_i + \underbrace{f\left(x_i + \frac{h}{2}, v_{i+1/2}\right)}_{\text{ф-ция в центре ячейки } = \boxed{f(x_{i+1/2}, v_{i+1/2})}} h + O(h^3)$$

Решение опять будем искать в два этапа ⇒ т.к. v вне узлов не задана

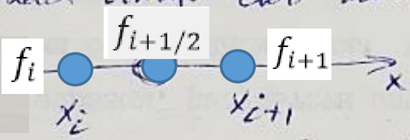
(отбросим $O(h^3)$); т.е. $v(x_{i+1/2}) \approx y_{i+1/2}$

$$\boxed{\begin{aligned} y_{i+1/2} &= y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \quad \text{— метод Эйлера для половины ячейки.} \\ y_{i+1} &= y_i + h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{i+1/2}\right) \end{aligned}}$$

— его тоже называют усовершенствованным методом Эйлера; очевидно его порядок точности — второй, т.е. $O(h^2), h \to 0$.

Это были двухэтапные методы

(1) и (2) — двухэтапные методы Рунге-Кутта, $\exists$ многоэтапные с более высокой точностью. Вообще точность зависит от того где и как мы аппроксимируем свободный член диф. ур-ния — f (производ. u' мы аппроксим. всегда одинаково — правая, разностн. произв.). Самая плохая аппр. своб. члена — это в левом узле ячейки (метод Эйлера f_i).



Более точная аппр. — это вычисл. f в центре ячейки (два первых метода Рунге-Кутта: (1) — среднеарифм. f по узлам x_i, x_{i+1}; (2) — вычисл. $f_{i+1/2}$ — в центре $x_{i+1/2}$).

Представим методы (1), (2) в форме, допускающей дальнейшее развитие серии методов Рунге-Кутта:

(1) — введём функции

$k_1 = h \underbrace{f(x_i, y_i)}_{f_i}$ — это добавка к y_i для получения y_{i+1} в форме Эйлера (самая грубая форма).

$y^*_{i+1} = y_i + k_1$. Добавка через f_i — в левом узле

$k_2 = h \overbrace{f(x_i + h, \underbrace{y_i + k_1}_{y^*_{i+1}})}^{f_{i+1}}$ — добавка через f_{i+1} — в правом узле.

$\Rightarrow$ метод "предиктор-корректор" примет вид: в форме Рунге-Кутта.

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)}$$ среднеарифм. добавка по f_i и f_{i+1}.

(2) k_1 – тоже самое,

$$k_2 = h\underbrace{f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)}_{f_{i+1/2}}$$ – добавка по среднему значению, вычисленному ≈ в середине ячейки

⟹ усовершенствованный метод Эйлера в форме Рунге-Кутта

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + k_2}$$

Т.о. методы Рунге-Кутта – это методы различных разных добавок к y_i, вычисленных через своб. член f в разных местах ячейки Δx_i. Общая структура методов Р-К:

$$y_{i+1} = y_i + \sum_j \sigma_j k_j$$ добавка, вычисленная в точке от x_i до x_{i+1}

где σ_i – весовые коэфф-ты разных ф-ций-добавок k_i, из ①,② видно, что они могут записываться несколькими способами

Метод Рунге-Кутта 4-го порядка

(3) Метод Рунге-Кутта 4-го порядка точности:

$k_1 = hf(x_i, y_i)$ – добавка (к y_i) через левый узел ячейки Δx_{i+1}, по м. Эйлера.

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, \underbrace{y_i + \frac{k_1}{2}}_{y_{i+1/2}}\right)$$ – добавка (к y_i) через центр ячейки, найденная по м. Эйлера: $y_{i+1/2} = y_i + \frac{k_1}{2}$.

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, \underbrace{y_i + \frac{k_2}{2}}_{y_{i+1/2}}\right)$$ – уточнённая добавка через центр ячейки опять по м. Эйлера

$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$ – добавка через правый узел в x_{i+1}.

Средние добавки возьмём с весовым коэф. 2 и найдём из всех – среднеарифм. значение добавок (всего 6 штук):

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}$$ глобальная (суммарная) точность $O(h^4)$ на $[x_0, x_n]$.

∃ более громоздкие и точные методы Р-К. Выбор, обоснование ф-ций k_i и коэфф-тов σ_i – "нудная процедура".